

# Rotations discrètes dans l'espace Mojette

Henri Der Sarkissian<sup>1,2</sup>   Benoît Recur<sup>3</sup>   Nicolas Normand<sup>1</sup>  
Jeanpierre Guédon<sup>1</sup>   Imants Svalbe<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Université de Nantes, IRCCyN UMR 6597, Équipe IVC

<sup>2</sup>Keosys, Saint-Herblain

<sup>3</sup>ANU RSPE, Camberra ACT

<sup>4</sup>Monash University, Clayton 3800 VIC

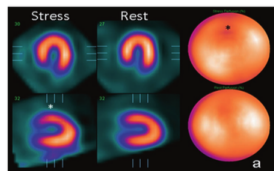
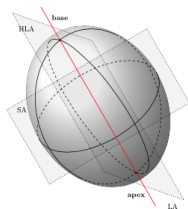
2015-02-05

# Plan de l'exposé

- ▶ Introduction
  - ▶ Tomographie, transformée de Radon, transformée Mojette
- ▶ Rotations par transformée Mojette
  - ▶ Description
  - ▶ Algorithme
  - ▶ Exemples
- ▶ Conclusion et perspectives

# Introduction

# Projet de thèse

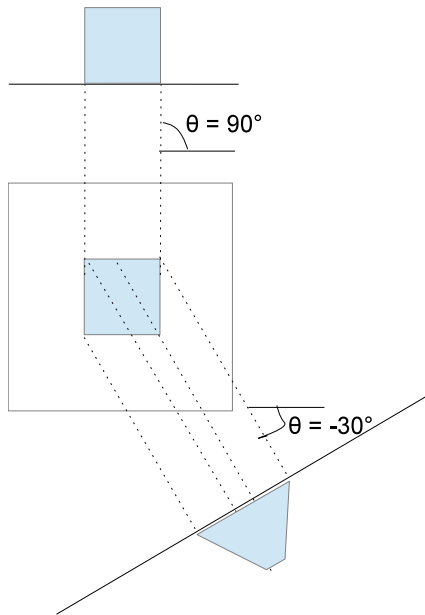


# Transformée de Radon

La transformée de Radon (1917) permet de représenter une fonction  $f$  par ses projections (intégrales).

$$[Rf](t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

# Transformée de Radon



# Sinogramme et tomographie

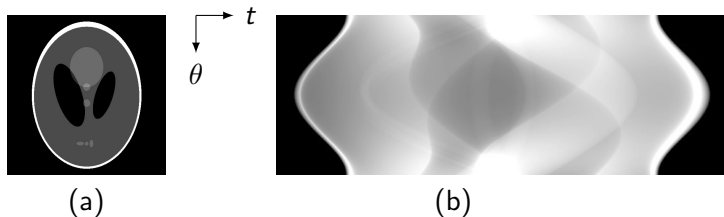


FIGURE: (a) Fantôme de Shepp-Logan. (b) Sinogramme

**Sinogramme** ensemble des projections d'un objet par la transformée de Radon. Chaque ligne représente une projection

**Reconstruction tomographique** problème inverse consistant à retrouver l'image d'origine à partir du sinogramme

# Rotation dans le sinogramme

Dans l'espace du sinogramme de Radon

- ▶ L'espace est cyclique dans la direction des angles de projections modulo  $\pi$
- ▶ Une rotation d'angle  $\theta$  correspond à un décalage de l'origine dans cet espace (translation cyclique)





# Transformée Mojette (GUEDON, BARBA et BURGER, 1995)

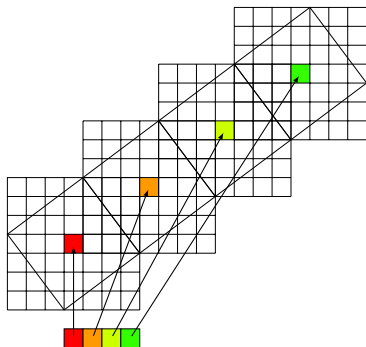
- ▶ Image discrète  $f(k, l)$
- ▶ Directions discrètes  $(p, q)$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux.
- ▶ Les valeurs sur les projections (*bins*) correspondent à la somme des pixels traversés.

$$[\text{MT}f](b, p, q) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} f(k, l) \Delta(b + kq - lp)$$

# Rotations dans l'espace Mojette

## Rotation dans l'espace Mojette

En s'inspirant des travaux sur FRT (SVALBE, 2011), on se propose de définir une rotation dans l'espace Mojette. Chaque projection est transformée en une projection d'un autre angle. La réversibilité est assurée grâce au changement d'échelle.



Les pixels subissant une rotation d'angle  $(p, q)$  ne sont plus connexes au sens usuel mais sont alignés sur une droite discrète.

# Rotation Mojette : algorithme

Algorithme pour la rotation-zoomée Mojette.

Pour chaque projection  $P$  de direction  $(p, q)$ .

1. Génération de la projection  $P'$  de direction  $(p', q')$
2. Convolution 1-D pour combler les “trous”

Puis reconstruction de l'image à partir des nouvelles projections.

# Calcul des nouvelles directions de projection

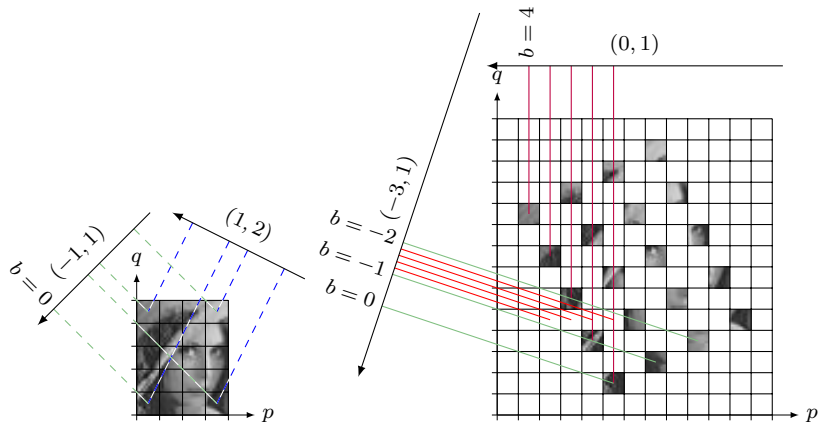
- ▶ Matrice de rotation associée :  $R_{(p_\theta, q_\theta)} = \begin{pmatrix} p_\theta & -q_\theta \\ q_\theta & p_\theta \end{pmatrix}$
- ▶ Nouvelle direction de projection  $(p', q')$  :

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\theta & -q_\theta \\ q_\theta & p_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pp_\theta - qq_\theta \\ pq_\theta + qp_\theta \end{pmatrix}$$

- ▶ Pour revenir à des entiers premiers entre eux, on divise éventuellement par leur pgdc :

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{pgdc}(p', q')} \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$$

# Calcul des nouvelles projections



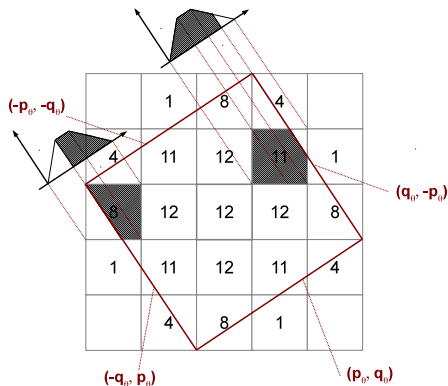
# Calcul des nouvelles projections

- ▶ La valeur des bins ne change pas lors de la rotation car les mêmes pixels sont échantillonnés (et éventuellement des pixels vides dans la nouvelle image si le pgcd de  $p$  et  $q$  est différent de 1.
- ▶ On obtient donc la nouvelle projection en sur-échantillonnant la projection initiale par le facteur de sur-échantillonnage

$$S = \frac{p_{\theta}^2 + q_{\theta}^2}{\text{pgdc}(p', q')}$$

# Remplissage des nouvelles projections

- ▶ Sur-échantillonnage → beaucoup de pixels nuls
- ▶ Interpolation de leur valeur par rapport à l'aire commune entre un "méta" pixel issu de la rotation et la grille initiale





# Calcul du masque de convolution

Problème : calculer l'aire commune entre les pixels initiaux (en noir) et un "méta-pixel" (en rouge).

- ▶ Taille du méta-pixel :  $|p_\theta| + |q_\theta|$
- ▶ Pour chaque pixel  $(k, l)$  du masque, on calcule la distance entre son centre et le bord (rouge) le plus proche :

$$d_{p_\theta, q_\theta}(k, l) = \left\| \begin{pmatrix} -q_\theta & p_\theta \\ p_\theta & q_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (1)$$

$$x_{p_\theta, q_\theta}(k, l) = \frac{p_\theta^2 + q_\theta^2}{2} - d_{p_\theta, q_\theta}(k, l) \quad (2)$$

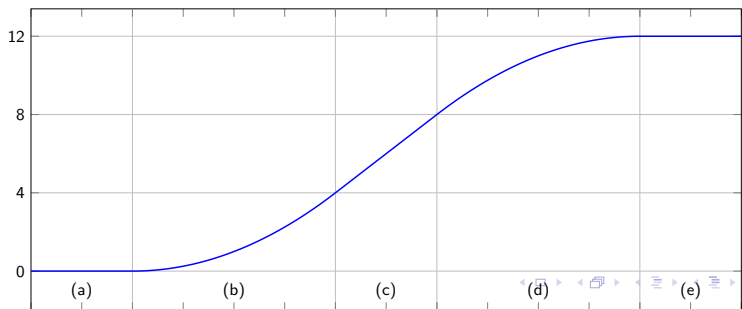
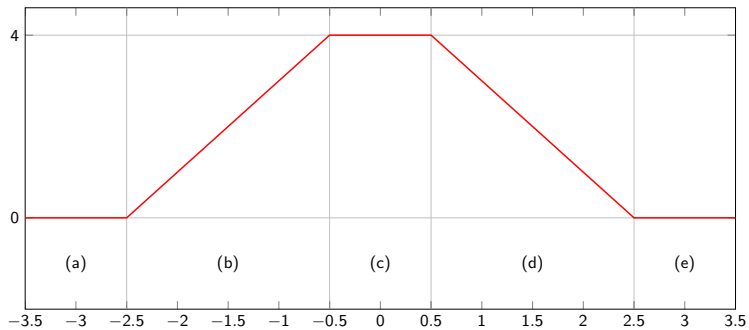
# Calcul du masque de convolution

- ▶ La distance entre le centre d'un pixel et le bord le plus proche permet d'obtenir la coordonnée sur projection correspondante.
- ▶ Aire d'un pixel  $\Leftrightarrow$  aire de sa projection (pixel uniforme et unitaire).
- ▶ Aire commune à déterminer pour chaque pixel :

$$\int_0^x Trap_{p_\theta, q_\theta}(t) dt$$

- ▶ Plus facile à calculer car on sait bien paramétrer le trapèze.

# Intégration trapèze



# Intégration trapèze

Formule close pour trouver l'aire directement à partir de  $x_{p_\theta, q_\theta}(k, l)$  :

$$K_{p_\theta, q_\theta}(x) = \begin{cases} 2|p_\theta q_\theta| - K(p_\theta, q_\theta, -x) & \text{si } x < 0 \\ |p_\theta q_\theta| + 2x \min\{|p_\theta|, |q_\theta|\} & \text{si } 0 \leq x < \frac{|p_\theta| - |q_\theta|}{2} \\ |p_\theta q_\theta| - x^2 + (|p_\theta| + |q_\theta|)x & \text{si } \frac{|p_\theta| - |q_\theta|}{2} \leq x < \frac{|p_\theta| + |q_\theta|}{2} \\ - \left( \frac{|p_\theta| - |q_\theta|}{2} \right)^2 & \\ 2|p_\theta q_\theta| & \text{sinon} \end{cases}$$

## Formulation discrète

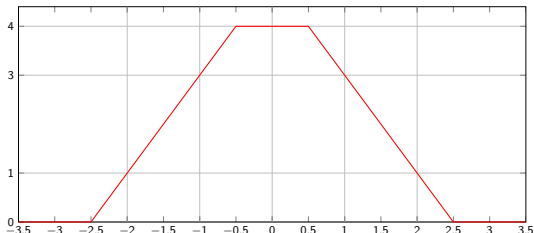
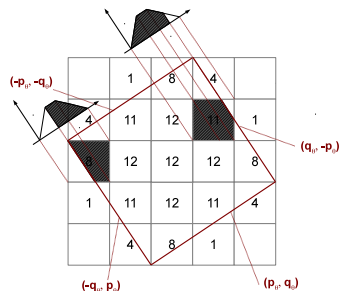
- ▶ Le trapèze discret peut-être calculé par convolution discrètes de fonctions portes de largeur respective  $p$  et  $q$  (si  $p$  ou  $q$  sont pairs) :

$$Trap_{p\theta, q\theta} = \{(1 \ 1)\} * (1 \cdots 1) * (1 \cdots 1)$$

- ▶ Les valeurs discrètes obtenues sont exactement celles nécessaires pour l'intégration  $\rightarrow$  calculs simples sur des entiers
- ▶ Projection Mojette du masque de convolution = masque de convolution 1D à appliquer sur les projections

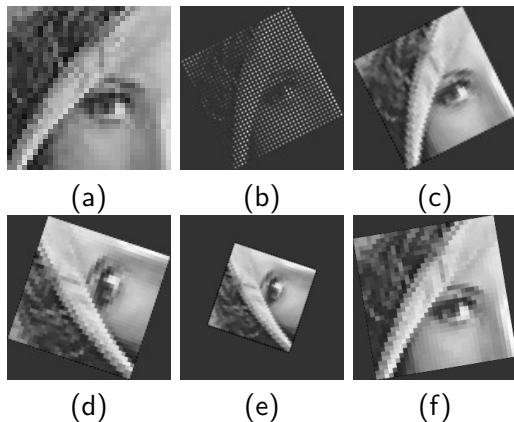
# Formulation discrète : exemple

Pour la rotation d'angle  $(3, 2)$  :



$$(1 \ 1) * (1 \ 1 \ 1) * (1 \ 1) = (1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1) \implies (1 \ 4 \ 8 \ 11 \ 12)$$

## Quelques exemples



**FIGURE:** (a) Image initiale  $32 \times 32$ . (b,c,d,f) Rotations Mojette  $(2, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(6, 1)$ .

## Conclusion et perspectives



# Conclusion

- ▶ Méthode de rotation dans l'espace Mojette
  - ▶ Basé sur la géométrie discrète
  - ▶ Dans l'espace des projections Mojette
- ▶ Rotation réversible
- ▶ Adapté aux problèmes de tomographie et de rotation couplés
- ▶ Suite des travaux : extension en 3D

# Perspectives

Autres transformations géométriques :

- ▶ Translation de vecteur entier  $(d_i, d_j)$ 
  - ▶ Décalage de tous les bins par :

$$\Delta b_{(p,q)}(d_i, d_j) = pd_j - qd_i$$

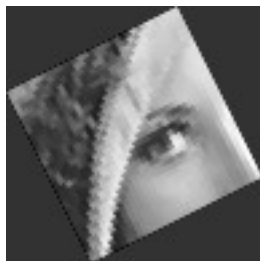
- ▶ Mise à l'échelle de facteur  $s \in \mathbb{N}^*$ 
  - ▶ Sur-échantillonnage des projections :

$$b' = b \times s$$

⇒ Groupe de similitudes défini dans l'espace des projections  
Mojette

# Perspectives

Perspective d'application : recalage d'acquisition



- ▶ Déterminer la similarité des deux images indépendamment de leur orientation, échelle, etc.
- ▶ Estimer la transformation affine entre les deux images ou volumes

⇒ Directement depuis l'acquisition des projections Mojette de ces volumes

# Merci pour votre attention

- ▶ Merci à Mr Mojette
- ▶ Sponsors :
  - ▶ Projets QuantiCardi & NucSan des Pays de la Loire
  - ▶ IRCCyN/IVC, Polytech Nantes, Université de Nantes
  - ▶ Keosys, Saint-Herblain
- ▶ H. Der Sarkissian, B. Recur, Jp. Guédon, P. Tervé, N. Normand et I. Svalbe “Rotations discrètes Mojette pour des images PET-CT”, TAIMA, pp. 89-94, mai 2013.
- ▶ H. Der Sarkissian, B. Recur, N. Normand et Jp. Guédon “Rotations in Mojette space”, IEEE ICIP, pp. 1187-91, Melbourne Australie, septembre 2013.